

MATEMÁTICAS I

SEPTIEMBRE 2009

1) Resuelve las ecuaciones:

a) $2^{2x} + 2^{x+2} - 2^{x-1} = 30$

b) $2 \cdot \log x - \log(x-2) = \log(3x-4)$

2) Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2$

b) $\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-1}{x^2-4}$

3) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4x < 0 \\ 2 \cdot (x-1) + 5 < 7 \end{array} \right\}$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y > 0 \\ x + y < 3 \end{array} \right\}$$

4) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC, siendo:

$$\hat{A} = 30^\circ ; \quad \hat{B} = 45^\circ \quad \text{y} \quad c = 20 \text{ cm.}$$

5) Resuelve la ecuación $2 \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \cos x = 4$ 6) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$, se pide:

a) Averigua su posición relativa.

b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

7) Dada la función $f(x) = \frac{x^2+16}{x}$, se pide:

a) Continuidad y asíntotas.

b) Crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.

c) Representación gráfica.

8) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 9x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

9) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x+8}} ; \quad g(x) = \arctag(x^2 - 1).$$

10) Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^2 + bx - 1$ tenga como recta tangente en el punto de abscisa 1 la recta de ecuación $y = 3x - 3$.

Nota: Todos los ejercicios tienen la misma puntuación

SOLUCIONES

1) a) $2^{2x} + 2^{x+2} - 2^{x-1} = 30 \rightarrow (2^x)^2 + 2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^{-1} = 30$

$z = 2^x \rightarrow z^2 + 4z - \frac{z}{2} = 30 \rightarrow 2z^2 + 8z - z = 60 \rightarrow 2z^2 + 7z - 60 = 0$

$z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{4} = \frac{-7 \pm 23}{4} = \begin{cases} 4 \rightarrow z = 4 = 2^x \Rightarrow x = 2 \\ -\frac{15}{2} \text{ imposible} \end{cases}$

b) $2 \cdot \log x - \log(x-2) = \log(3x-4) \rightarrow \log \frac{x^2}{x-2} = \log(3x-4) \rightarrow \frac{x^2}{x-2} = 3x-4$

$x^2 = (x-2)(3x-4) \rightarrow x^2 = 3x^2 - 6x - 4x + 8 \rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ la solución $x = 1$ no es válida (saldría $\log(-1)$)

2) a) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2 \rightarrow \sqrt{x+7} = 2 - \sqrt{x-1} \rightarrow x+7 = (2 - \sqrt{x-1})^2$

$x+7 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1 \rightarrow 4 = -4\sqrt{x-1} \rightarrow 1 = x-1 \rightarrow x = 2$

Comprobación: $\sqrt{2+7} + \sqrt{2-1} = 2 \rightarrow 3+1=2$ NO tiene solución

b) $\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-1}{x^2-4}$ m.c.m. = $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

$\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x^2-4} \rightarrow 2x+1 - (x^2 + 4x + 4) = x-1$

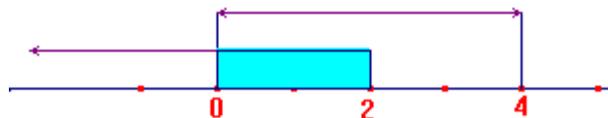
$2x+1 - x^2 - 4x - 4 = x-1 \rightarrow -x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$ Solución $x=-1$ (la solución -2 no es válida, anula denominador)

3) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\left. \begin{matrix} x^2 - 4x < 0 \\ 2 \cdot (x-1) + 5 < 7 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} x(x-4) < 0 \\ 2x-2+5 < 7 \\ 2x < 4 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} \text{sol: } (0,4) \\ \text{sol: } (-\infty, 2) \end{matrix} \right\}$

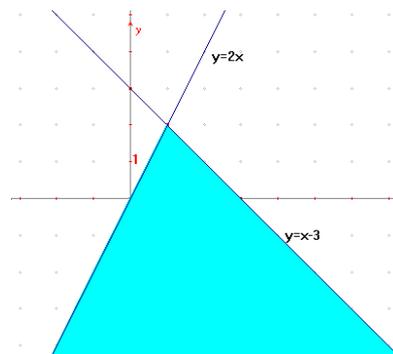
Solución del sistema: la intersección de ambas, es decir (0,2)



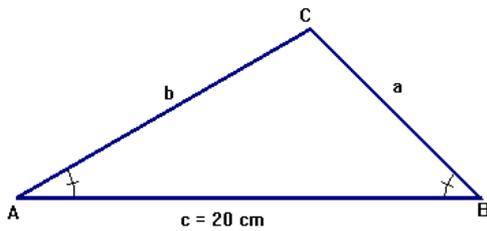
b) $\left. \begin{matrix} 2x - y > 0 \\ x + y < 3 \end{matrix} \right\}$ representamos las rectas:

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x \end{cases}$

y marcamos los semiplanos correspondientes a cada inecuación, la intersección de los dos semiplanos es la solución del sistema, marcada en azul y sin entrar ninguna de las semirrectas.



4) Resuelve el triángulo ABC, siendo: $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{B} = 45^\circ$ y $c = 20$ cm.



$$\hat{C} = 180 - 75 = 105^\circ \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 30} = \frac{20}{\sin 105} \rightarrow a = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin 105^\circ = \sin(45 + 60) = \sin 45 \cos 60 + \sin 60 \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$a = \frac{40}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{40(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}; \quad \frac{b}{\sin 45} = \frac{20}{\sin 105}$$

$$b = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = 10(\sqrt{12} - 2) \text{ cm}$$

5) $2 \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \cos x = 4 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x = 4 \rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 5 \cos x = 4$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \text{ no válida} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

6) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$, se pide:

a) Averigua su posición relativa. $\vec{d}_r = (1,1)$, $\vec{d}_s = (1,-1)$ vectores de dirección no paralelos, luego las dos rectas se cortan

b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

$$\left. \begin{aligned} r &\equiv x-1 = y-2 \rightarrow x-y = -1 \\ s &\equiv t = x-1 = -y+2 \rightarrow x+y = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x-y = -1 \\ x+y = 3 \end{cases} \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(1,2)$$

Observamos que $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (1,1) \cdot (1,-1) = 0 \Rightarrow r$ y s son perpendiculares, luego el ángulo que forman es de 90°

7) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x}$, se pide:

a) Continuidad y asíntotas. Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 16}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 16}{x} = \frac{16}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 16}{x} = \frac{16}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad x = 0 \text{ A.Vertical}$

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 16}{x} = \infty$ no tiene

Asíntota oblicua: $y = mx + n \rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 16}{x^2} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 16}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 16 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{16}{x} \right) = 0 \rightarrow y = x \text{ A. Oblicua}$

b) Crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.

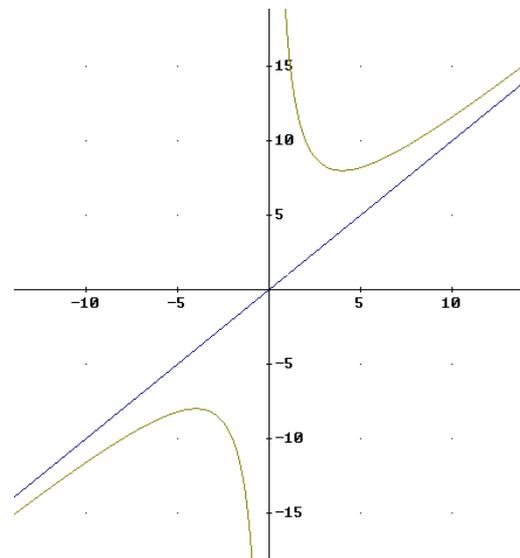
$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 16)}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = 0$

$x = \pm 4$ posibles extremos

Comprobamos:



Máximo (-4, -8) Mínimo(4, 8)



c) Representación gráfica.

8)a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 9x} - \sqrt{x^2 - x} \right) = (\infty - \infty) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 9x} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + 9x} + \sqrt{x^2 - x})}{(\sqrt{x^2 + 9x} + \sqrt{x^2 - x})} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 9x - x^2 + x}{(\sqrt{x^2 + 9x} + \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{\sqrt{1 + \frac{9}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{10}{2} = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \left(\frac{0}{0} \right)$ factorizamos numerador y denominador:

	1	-1	-8	+12
2		2	+2	-12
	1	+1	-6	0
2		+2	+6	
	1	+3	0	

	1	-2	-4	+8
2		+2	0	-8
	1	0	-4	0
2		+2	+4	
	1	+2	0	

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{5}{4}$$

9) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x+8}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}} \cdot \frac{x+8-(x+1)}{(x+8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+8}}} \cdot \frac{7}{(x+8)^2} = \frac{7}{2(x+1)(x+8)}$$

$$g(x) = \arctan(x^2 - 1) \rightarrow g'(x) = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$$

10) Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^2 + bx - 1$ tenga como recta tangente en el punto de abscisa 1 la recta de ecuación

$$y = 3x - 3 \rightarrow \text{pendiente } 3 \Rightarrow f'(1) = 3$$

también sabemos que la recta tangente lo es en el punto $x = 1 \Rightarrow y = 3 - 3 = 0$

$$\text{es decir, } f(1) = 0 \rightarrow f(1) = a + b - 1 = 0$$

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(1) = 2a + b = 3$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 - b \\ 2(1 - b) + b = 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2 - 2b + b = 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \rightarrow a = 2$$

Solución: $a = 2$, $b = -1$